



# گنبد

۲۵

خط سفید

ریاضی و آمار ۳

دکتر افروزه جعفری  
مرتضی برزویی

## پیشگفتار

درد و ادب به تمامی دبیران و مدرسان گرامی و دانش آموزان دوست داشتنی و سخت‌کوش سراسر ایران پهناور با توجه به تغییرات صورت گرفته در شرایط برگزاری کنکور سراسری و **تأثیر سوابق تحصیلی** در ورود به دانشگاه و موسسات آموزش عالی، بر آن شدیم تا منبعی مطمئن برای یادگیری و آموزش اثربخش و سنجش و ارزیابی هدفمند و موثر فراهم کرده و مسیر دانش آموزان عزیز را جهت کسب **نمره (۲۰)** در تمام امتحانات پیش رویشان هموار سازیم.

## درباره کتاب

مجموعه کتاب‌های **سیگنال ۲۰ خط سفید** برای تمام دروس پایه دوازدهم در ۳ رشته تحصیلی علوم ریاضی و فیزیک، علوم تجربی و علوم انسانی به تالیف و گردآوری رسیده و شامل ۴ بخش اصلی می‌باشد.

۱. آموزش (درسنامه کاملاً کاربردی)

محتوای تالیفی درسنامه‌ها شامل تمام مطالب آموزشی مهم و کاربردی و مفاهیم اساسی و نکات کلیدی کتاب درسی بوده که موجب تسهیل فرآیند یادگیری شده و امکان **مرورهای سریع** و مانا و همچنین **جمع‌بندی‌های دوره‌ای** را در طول سال تحصیلی فراهم می‌سازد.

۲. سنجش (سوالات امتحانات نهایی و احتمالی)

به منظور بالا بردن سطح **توانایی و مهارت** دانش‌آموزان پایه دوازدهم برای پاسخگویی کامل و درست به پرسش‌های امتحانات گوناگون و تقویت یادگیری، سوالاتی در تیپ و قالب‌های متنوع **نهایی و تالیفی-احتمالی** گردآوری و تالیف گردیده است؛ که با تمرین و تکرار مداوم این سوالات، امکان شناخت **نقاط قوت و ضعف** دانش‌آموزان را در درس‌های مختلف فراهم می‌سازد.

۳. نمونه سوال امتحان (امتحانات ۲۰ نمره‌ای نوبت اول و دوم - نهایی و احتمالی)

علاوه بر مجموعه سوالات طبقه بندی شده، ۲ نمونه امتحان تالیفی-احتمالی نوبت اول (دی ماه)، ۲ نمونه امتحان تالیفی-احتمالی نوبت دوم (خردادماه)، امتحان نهایی دوره های شهریور و دی ماه ۱۴۰۱ و امتحان نهایی دوره خرداد ماه ۱۴۰۲ برای بررسی و ارزیابی میزان یادگیری و ارتقاء هرچه بیشتر توانمندی دانش‌آموزان عزیز و کسب بهترین نتیجه فراهم شده است.

۴. پاسخنامه تشریحی آموزشی

پاسخنامه کاملاً تشریحی و آموزشی سوالات در پایان کتاب برای تقویت یادگیری و کاهش حداکثری خطاها و اشتباهات احتمالی دانش‌آموزان آماده سازی شده است.

## سیگنال بگیر تا بیست برو!

## فهرست

### بارم بندی

فصل	محدوده فصل	نوبت اول	نوبت دوم	شهریورودی
۱	کل	۱۵	۵	۸
۲	تا صفحه ۶۰	۵	۲	۵/۵
	صفحه ۶۰ به بعد		۳/۵	
۳	کل		۹/۵	۶/۵
جمع		۲۰	۲۰	۲۰

درسنامه	سوال	پاسخنامه تشریحی
فصل ۱: درس اول	۳	۴
درس دوم	۵	۶
درس سوم	۷	۹
فصل ۲: درس اول	۱۱	۱۲
درس دوم	۱۲	۱۳
فصل ۳: درس اول	۱۷	۱۹
درس دوم	۱۹	۲۱
درس سوم	۲۱	۲۲

سوال	پاسخنامه امتحان
۱۵	امتحان شماره ۱
۱۶	امتحان شماره ۲
۲۳	امتحان شماره ۳
۲۴	امتحان شماره ۴
۲۵	امتحان نهایی شهریورماه ۱۴۰۱
۲۷	امتحان نهایی دی‌ماه ۱۴۰۱
۲۹	امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۲



سؤال تعداد حالت‌های پر کردن خانه‌های خالی را مشخص می‌کنیم و در نهایت با اصل ضرب تعداد کلمات یا اعداد خواسته شده را بدست می‌آوریم.

**مثال)** با حروف کلمه «خورشید» و بدون تکرار حروف (با معنی یا بدون معنی) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت که با حرف «ی» شروع شود و به حرف «خ» ختم شود. (شهریور ۹۹)

**پاسخ)** چون کلمه ۴ حرفی خواسته شده پس چهار تا خانه رسم می‌کنیم:

--	--	--	--

باتوجه به محدودیت گفته شده، حرف اول فقط «ی» و حرف آخر فقط «خ» باشد، اولین و آخرین جایگاه به یک حالت پر می‌شود و چون تکرار مجاز نیست حرف «ی» و «خ» از انتخاب‌های بعدی حذف میشوند پس با ۳ و ۲ حالت باید بقیه مکان‌ها را پر کنیم یعنی خانه‌های خالی به صورت مقابل پر می‌شوند:

۱	۴	۳	۱
---	---	---	---

و در نهایت تعداد کلمات ۴ حرفی، با این شرایط طبق اصل ضرب برابر خواهد بود با  $1 \times 4 \times 3 \times 1 = 12$

**مثال)** با ارقام ۸ و ۷ و ۶ و ۵ و ۲ و ۱ و ۰ چند عدد ۵ رقمی فرد بدون رقم تکراری می‌توان نوشت؟ (احتمالی)

**پاسخ)** چون عدد ۵ رقمی خواسته شده باید ۵ تا خانه‌ی خالی رسم کنیم:

--	--	--	--	--

رقم یکان باید فرد باشد پس ۳ حالت می‌توان برای آن در نظر گرفت. (اولین جایگاه از سمت راست) برای پر کردن بقیه خانه‌ها از سمت چپ شروع می‌کنیم چون در اولین خانه از سمت چپ صفر نمی‌تواند قرار بگیرد و همچنین یکی از ارقام فرد هم در یکان استفاده شد پس برای آن فقط ۵ حالت داریم. برای جایگاه بعدی به خاطر غیر تکراری بودن ارقام یک حالت نسبت به جایگاه قبلی کم می‌شود اما صفر می‌تواند در آن جایگاه استفاده شود بنابراین برای جایگاه بعدی هم ۵ حالت داریم و به همین ترتیب می‌توانیم خانه‌های خالی را به صورت زیر پر کنیم:

۵	۵	۴	۳	۳
---	---	---	---	---

و در نهایت تعداد اعداد ۵ رقمی با این شرایط برابر خواهد بود با:  $5 \times 5 \times 4 \times 3 \times 3 = 900$

**تبدیل:** تعداد انتخاب‌های r شی از n شی که جابه‌جایی یا ترتیب اشیاء اهمیت داشته باشد را با نماد  $P(n, r)$  نشان می‌دهیم و با استفاده از فرمول مقابل محاسبه می‌شود:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

**مثال)** از بین ۱۰ نفر شرکت کننده در مسابقه دو میدانی به چند حالت می‌توان به ۳ نفر اول جایزه داد؟ (احتمالی)

**پاسخ)** می‌دانیم که در انتخاب ۳ نفر اول ترتیب اهمیت دارد بنابراین تعداد حالت‌ها را طبق رابطه تبدیل می‌نماییم:

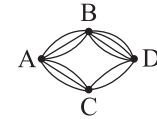
$$P(10, 3) = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 720$$

**ترکیب:** تعداد انتخاب‌های r شی از n شی که جابه‌جایی یا ترتیب اشیاء مهم نباشد

**اصل جمع:** اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد و این دو عمل را با هم نتوانیم انجام دهیم در این صورت به (m+n) طریق می‌توان عمل اول یا عمل دوم را انجام داد.

**اصل ضرب:** اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد به طوری که مرحله اول به m طریق و مرحله دوم به n طریق قابل انجام باشد در این صورت عمل را به (m×n) طریق می‌توان انجام داد.

**مثال)** مطابق شکل مقابل بین شهرهای A و B و C و D راهایی وجود دارند که همگی دو طرفه هستند. مشخص کنید به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D رفت؟ (خرداد ۹۹)



**پاسخ)** برای مسافرت از شهر A به شهر D دو مسیر وجود دارد:

مسیر ۱  $\xrightarrow{\text{اصل ضرب}} 3 \times 4 = 12$  از شهر A به B و سپس به شهر D: مسیر ۱

مسیر ۲  $\xrightarrow{\text{اصل ضرب}} 3 \times 2 = 6$  از شهر A به C و سپس به شهر D: مسیر ۲

پس در کل طبق اصل جمع به  $12 + 6 = 18$  طریق می‌توانیم از A به D سفر کنیم.

#### نکته

اصل جمع و اصل ضرب به ترتیب برای بیشتر از ۲ عمل و بیشتر از ۲ مرحله قابل تعمیم است.

**نماد فاکتوریل:** اگر n یک عدد طبیعی باشد n! (بخوانید n فاکتوریل) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

**مثال)** حاصل  $\frac{6!}{3!}$  را بنویسید. (خرداد ۱۴۰۰)

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120$$

#### نکته

قرارداد می‌کنیم که  $0! = 1$

**جایگشت:** به هر یک از حالت‌های قرار گرفتن n شی متمایز در کنار هم یک جایگشت n شی می‌گوییم.

#### نکته

تعداد جایگشت‌های n شی متمایز برابر n! است.

**مثال)** ۷ نفر به چند طریق می‌توانند در یک صف پشت سر هم قرار بگیرند. (احتمالی)

**پاسخ)** طبق تعریف جایگشت به ۷! طریق می‌توانند پشت سر هم در یک صف قرار بگیرند

#### روش حل سؤالات مربوط به ساختن اعداد و کلمات:

برای حل این گونه سؤالات ابتدا به تعداد ارقام عدد و یا تعداد حروف کلمه مورد نظر خانه خالی در نظر می‌گیریم و سپس با توجه به شرایط و محدودیت‌های بیان شده در صورت

**مثال ۱۲** نقطه روی محیط دایره قرار دارند با آن‌ها چند وتر و چند مثلث متمایز می‌توان ساخت؟ (تمرین کتاب درسی)

**پاسخ** می‌دانیم که هر وتر با دو نقطه و هر مثلث با ۳ مشخص می‌شود که ترتیب انتخاب نقاط اهمیت ندارند بنابراین:

$$\text{تعداد وترها} = \binom{12}{2} = \frac{12!}{2! \times (12-2)!} = \frac{12 \times 11 \times 10!}{2! \times 10!} = 66$$

$$\text{تعداد مثلث‌ها} = \binom{12}{3} = \frac{12!}{3! \times (12-3)!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{3! \times 9!} = 220$$

را با نماد  $\binom{n}{r}$  یا  $C(n, r)$  نشان می‌دهیم و با استفاده از فرمول مقابل محاسبه می‌شود:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

**مثال** مجموعه هشت عضوی چند زیر مجموعه ۳ عضوی دارد؟ (خرداد ۹۸)

**پاسخ** می‌دانیم که در یک مجموعه ترتیب قرار گرفتن اعضا اهمیت ندارد بنابراین طبق رابطه ترکیب تعداد حالت‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$C(8, 3) = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times (8-3)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = 56$$

## سوالات امتحان نهایی و احتمالی درس اول

**الف) جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.**

۱- تعداد جایگشت‌های مختلف ۴ کتاب متمایز ..... می‌باشد. (دی ۱۴۰۱)

۲- حاصل  $\frac{5!}{3!}$  برابر است با ..... (شهریور ۱۴۰۱)

۳- برای عدد صفر، فاکتوریل را به صورت ..... =  $0!$  تعریف می‌کنیم. (خرداد ۱۴۰۰)

۴- به ..... طریق می‌توانیم ۳ کتاب را از بین ۵ کتاب انتخاب و در یک قفسه بچینیم. (خرداد ۹۹)

**ب) درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.**

۵- حاصل  $\frac{8!}{4!}$  برابر ۲! است. (خرداد ۱۴۰۱)

۶- برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل را به صورت  $1 = 1!$  و  $0 = 1!$  تعریف می‌کنیم. (شهریور ۹۹)

**ج) گزینه صحیح را انتخاب کنید. (خرداد ۱۴۰۰)**

۷- حاصل  $\frac{6!}{3!}$  کدام است؟

الف) ۲۰      ب) ۳۰      ج) ۲۵      د) ۱۲۰

۸- ۸ نقطه متمایز واقع بر محیط دایره چند مثلث می‌توان تشکیل داد؟

الف) ۱۵      ب) ۲۰      ج) ۴۲      د) ۵۶

۹- حاصل  $P(2, 2)$  کدام است؟

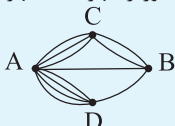
الف) ۱      ب) ۲      ج) ۴      د) صفر

۱۰- با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و بدون تکرار ارقام چند عدد سه رقمی زوج می‌توان نوشت؟ (دی ۱۴۰۱)

۱۱- با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (دی ۹۹)

۱۲- مجموعه پنج عضوی  $\{1, 2, 4, 6, 8\}$  چند زیر مجموعه دو عضوی دارد؟ (دی ۹۸)

۱۳- بین چهار شهر A و B و C و D مطابق شکل مقابل راه‌هایی وجود دارد. مشخص کنید به چند طریق می‌توان از شهر C بدون عبور از شهر B به شهر D سفر کرد؟



(خرداد ۱۴۰۱)

۱۴- علی ۳ کتاب علمی و ۴ کتاب داستان دارد. او می‌خواهد از بین کتاب‌هایش یک کتاب علمی و یک کتاب داستان را به دوستش هدیه بدهد. به چند طریق این کار

امکان پذیر است؟ (شهریور ۱۴۰۱)

۱۵- مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن به صورت  $\binom{5}{3}$  باشد. (خرداد ۱۴۰۱)



## درس دوم: احتمال

**پدیده تصادفی:** به پدیده‌ای که نتیجه آن را نتوان قبل از انجام به طور قطعی پیش‌بینی کرد اما مجموعه‌ای از نتایج ممکن را بتوان پیش‌بینی کرد پدیده یا آزمایش تصادفی می‌نامند و به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی برآمد می‌گوییم.

**مثال:** پرتاب سکه در شروع مسابقات فوتبال یک پدیده تصادفی می‌باشد.

**فضای نمونه:** مجموعه تمام نتایج ممکن در یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه آزمایش تصادفی می‌نامیم و آن را با حرف  $S$  نشان می‌دهیم و از نماد  $n(S)$  برای تعداد اعضای آن استفاده می‌کنیم.

### نکته

تعداد اعضای برخی از فضاهای نمونه را به صورت زیر داریم:

(الف) اگر یک سکه را  $n$  بار ( $n$  سکه با هم) پرتاب کنیم آنگاه  $n(S) = 2^n$

(ب) اگر یک تاس را  $n$  بار ( $n$  تاس را با هم) پرتاب کنیم آنگاه  $n(S) = 6^n$

(ج) اگر خانواده‌ای دارای  $n$  فرزند باشد تعداد اعضای فضای نمونه جنسیت فرزندان  $2^n$  می‌باشد.

(د) اگر از درون یک جعبه با  $n$  مهره،  $k$  مهره خارج کنیم تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با  $n(S) = \binom{n}{k}$

(ه) در پرتاب  $n$  سکه و  $m$  تاس، تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با  $2^n \times 6^m$ .

**مثال:** در پرتاب یک سکه و یک تاس تعداد اعضای فضای نمونه طبق اصل ضرب برابر است با  $n(S) = 2 \times 6 = 12$

**پیشامد:** به هر یک از زیر مجموعه‌های فضای نمونه  $S$  یک پیشامد می‌گویند.

**مثال:** در پرتاب دو سکه با هم پیشامد اینکه مجموعه اعداد رو شده  $\gamma$  باشد به صورت زیر است:  $A = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$

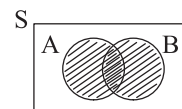
**پیشامد غیر ممکن:** از آن جایی که  $\emptyset \subseteq S$  پس  $\emptyset$  (تهی) یک پیشامد از فضای نمونه  $S$  می‌باشد که به آن پیشامد غیر ممکن می‌گویند.

**پیشامد حتمی:** از آن جایی که  $S \subseteq S$  پس  $S$  (فضای نمونه) یک پیشامد از فضای نمونه  $S$  می‌باشد که به آن پیشامد حتمی می‌گویند.

**اعمال روی پیشامدها:** اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه  $S$  باشند:

**الف) اجتماع دو پیشامد ( $A \cup B$ )** زمانی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای  $A$  یا  $B$  رخ دهد.

$$A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \vee x \in B\}$$



**ب) اشتراک دو پیشامد ( $A \cap B$ )** زمانی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد  $A$  و  $B$  رخ دهند.

$$A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \in B\}$$



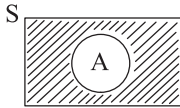
**ج) تفاضل دو پیشامد** زمانی رخ می‌دهد که پیشامد  $A$  رخ دهد ولی  $B$  رخ ندهد.

$$A - B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$



**د) متمم پیشامد  $A$**  یعنی  $A'$  زمانی رخ می‌دهد که  $A$  رخ ندهد.

$$A' = \{x \in S \mid x \notin A\}$$



**پیشامدهای ناسازگار:** دو پیشامد  $A$  و  $B$  را ناسازگار می‌گوییم هر گاه  $A$  و  $B$  با هم رخ

ندهند به عبارت دیگر داشته باشیم  $A \cap B = \emptyset$

### نکته

دو پیشامد  $A$  و  $A'$  ناسازگارند یعنی  $A \cap A' = \emptyset$

**مثال:** در پرتاب یک تاس دو پیشامد زوج آمدن و فرد آمدن ناسازگار هستند.

**احتمال یک پیشامد:** اگر  $A$  یک پیشامد تصادفی از فضای نمونه  $S$  باشد احتمال رخ

دادن  $A$  را با نماد  $P(A)$  نمایش می‌دهیم و برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد اعضای پیشامد مطلوب}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه}}$$

با توجه به رابطه احتمال مقدار احتمال یک پیشامد نمی‌تواند یک عدد منفی باشد و چون تعداد اعضای پیشامد نمی‌تواند از تعداد اعضای فضای نمونه بیشتر باشد بنابراین مقدار احتمال هم نمی‌تواند از ۱ بیشتر باشد یعنی  $0 \leq P(A) \leq 1$

همچنین با توجه به تعاریف پیشامد نشدنی و حتمی داریم:

$$P(S) = 1, \quad P(\emptyset) = 0$$

برای پیشامد  $A$  و متمم آن یعنی  $A'$  هم رابطه احتمال به صورت مقابل برقرار است:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

برای دو پیشامد  $A$  و  $B$  در فضای نمونه  $S$  داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد ناسازگار باشند چون  $A \cap B = \emptyset$  و در نتیجه  $P(A \cap B) = 0$  بنابراین می‌توانیم برای دو پیشامد ناسازگار رابطه اجتماع را به صورت زیر بیان کنیم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

**مثال:** اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه  $S$  باشند و احتمال رخ دادن  $A$  برابر  $\frac{1}{10}$  و احتمال رخ دادن  $B$  برابر  $\frac{1}{8}$  و احتمال رخ دادن همزمان  $A$  و  $B$  برابر  $\frac{1}{40}$  باشد احتمال اینکه حداقل یکی از آن‌ها رخ دهد چقدر است؟ (احتمالی)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{10} + \frac{1}{8} - \frac{1}{40} = \frac{9}{40} \quad \text{پاسخ}$$

**مثال:** در کیسه‌ای ۴ مهره سفید ۳ مهره زرد و ۲ مهره آبی وجود دارد. ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم مطلوبست محاسبه احتمال آنکه رنگ مهره‌ها هر سه متفاوت باشد؟ (دی ۹۹)

یک مهره انتخاب کنیم یعنی:

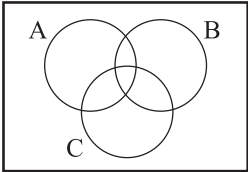
$$n(A) = \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$$

پاسخ) ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه را محاسبه می‌کنیم:

$$n(s) = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3! \times 6!} = 84$$

حال با توجه به اینکه می‌خواهیم مهره‌ها از رنگ‌های متفاوت باشند باید از هر رنگ فقط

زمان امتحان: ۹۰ دقیقه	امتحان احتمالی نوبت اول	رشته: علوم انسانی	ریاضی و آمار (۳)	امتحان شماره ۱
نمره				ردیف
۱/۵			<p><b>درستی یا نادرستی هریک از موارد زیر را مشخص کنید.</b></p> <p>الف) مرتب کردن داده ها در گام دوم چرخه آمار اتفاق می افتد.</p> <p>ب) تعداد حالت های قرار گرفتن ۴ دانش آموز در یک صف برابر است با ۴!</p> <p>ج) طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهم ترین گام رسیدن به پاسخ می باشد.</p>	۱
۱/۵			<p><b>جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید.</b></p> <p>الف) فضای نمونه پرتاب سه سکه باهم ..... عضو دارد.</p> <p>ب) مجموعه ای که تمام حالات ممکن در احتمال را شامل شود ..... می نامند.</p> <p>ج) تعداد اعضای جامعه را ..... می نامند.</p>	۲
۲			<p><b>گزینه صحیح را انتخاب کنید.</b></p> <p>الف) حاصل <math>\frac{6!}{3!}</math> برابر است با:</p> <p>۳۶۰(۱)      ۱۲۷(۲)      ۴۲۰(۳)      ۳۰۰(۴)</p> <p>ب) یک مجموعه ۸ عضوی چند از مجموعه سه عضوی دارد.</p> <p>۲۷(۱)      ۵۶(۲)      ۲۴(۳)      ۶۰(۴)</p>	۳
۲			با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد چهار رقمی زوج می توان نوشت؟ (بدون تکرار)	۴
۲			با حروف کلمه کامپیوتر چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت که ( بدون تکرار ) با حرف «پ» شروع شود و به حرف «ر» ختم شود.	۵
۲			دو تاس را باهم پرتاب می کنیم. احتمال اینکه حاصل ضرب اعداد برآمده از دو تاس کمتر از ۴ باشد.	۶
۱			اگر $A, B, C$ سه پیشامد در فضای بسته $S$ باشند، پیشامد اینکه فقط $A$ رخ دهد و پیشامد های $B$ یا $C$ رخ ندهد را در نمودار مشخص کنید.	۷
				
۲			جعبه ای که شامل ۴ مهره قرمز ۷ مهره آبی می باشد، ۳ مهره را به تصادف انتخاب می کنیم. مطلوب است احتمال اینکه تعداد مهره های قرمز از مهره های آبی بیشتر باشد چقدر است.	۸
۳			چهار جمله اول دنباله $a_n = \frac{(-1)^n}{2}$ را بنویسید و آن را رسم کنید.	۹
۳			<p>جملات دنباله <math>\frac{1}{3^n}</math> و ۳ و ۹ را در نظر بگیرید.</p> <p>الف) فرمول بازگشتی این دنباله را بنویسید.</p> <p>ب) ضابطه این دنباله را بنویسید.</p>	۱۰
۲۰	جمع نمرات	موفق باشید		

امتحان شماره ۳		ریاضی و آمار (۳)	رشته: علوم انسانی	امتحان احتمالی نوبت دوم	زمان امتحان: ۹۰ دقیقه
ردیف	درستی یا نادرستی هریک از موارد زیر را مشخص کنید.				
۱	<p>الف) به انتخاب شیء از <math>\Omega</math> شیء <math>\Omega</math> که در آن جابه جایی اشیاء انتخاب شده اهمیت دارد، ترکیب می‌گوییم.</p> <p>ب) نسبت مشترک (۲)، دنباله <math>1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots</math> برابر است با <math>\frac{1}{3}</math>.</p> <p>ج) دو تابع نمایی <math>y = a^x</math> (<math>0 &lt; a &lt; 1</math>) با افزایش مقادیر <math>x</math>، مقادیر <math>y</math> نیز افزایش می‌یابد.</p> <p>د) در پرتاب یک تاس دو پیشامد زوج آمدن و فرد آمدن، دو پیشامد ناسازگار هستند.</p>				
۲	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید.</p> <p>الف) ریشه سوم عدد <math>27 -</math> برابرست با.....</p> <p>ب) مطمئن ترین نمودار برای متغیر کمی، نمودار..... می‌باشند.</p> <p>ج) در یک دنباله حسابی اگر <math>d &lt; 0</math> (اختلاف مشترک)، در این صورت دنباله..... می‌باشد. (افزایش - کاهش)</p> <p>د) اگر برای دو پیشامد <math>A</math> و <math>B</math> داشته باشیم..... در این صورت ناسازگار می‌نامیم.</p>				
۳	با ارقام ۰ و ۲ و ۳ و ۵ و ۷ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت. (بدون تکرار)				
۴	روی یک محیط دایره ۱۰ نقطه وجود دارد. چه تعداد مثلث با این نقاط می‌توان تشکیل داد.				
۵	می‌خواهیم از بین ۷ دانش آموز پایه دهم و ۵ دانش آموز پایه یازدهم یک تیم ۸ نفره تشکیل دهیم. مطلوب است احتمال اینکه ۶ نفر از اعضای تیم پایه دهم و ۲ نفر پایه یازدهم باشند.				
۶	با توجه به رابطه $a_n = 1$ ، $a_{n+1} = a_n + (-1)^n$ ، سه جمله اول را بنویسید.				
۷	جمله سوم یک دنباله هندسی ۲۷ و جمله پنجم آن ۲۴۳ می‌باشد. جمله هفتم این دنباله را مشخص کنید.				
۸	<p>دنباله <math>1, 11, 117, 3</math> را در نظر بگیرید.</p> <p>الف) رابطه بازگشتی را بنویسید.</p> <p>ب) مجموعه ۲۰ جمله اول را بدست آورید.</p>				
۹	مقدار $x$ را از تساوی زیر بدست آورید.				
	$\frac{x^y \times 35^z}{5^z \times 5^z \times 5^5} = 7^{10}$				
۱۰	هریک از اعداد رادیکالی توان دار و هر عدد توان دار را به شکل رادیکالی بنویسید.				
	$7^{\frac{2}{9}}$ (الف)	$\sqrt[3]{6^2}$ (ب)			
۱۱	نمودار تابع $y = 3^x$ را رسم کنید و از روی نمودار مقدار تقریبی $3^{\frac{1}{2}}$ بنویسید.				
۱۲	جمعیت شهری در سال ۲۰۲۰ میلادی حدود یک میلیون نفر برآمد شده است اگر رشد جمعیت این شهر با نرخ ۱۰ درصد در حال افزایش، رشد در سال ۲۰۲۲ میلادی، جمعیت این شهر چند نفر خواهد بود.				
۲۰	جمع نمرات موفق باشید				





## فصل اول درس اول

(الف)

$$4! = 24 - 1$$

۱-۳

(ب)

$$\binom{5}{3} = 10 - 4$$

$$\frac{8!}{4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 1680$$

۶-درست

(ج)

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120$$

۷-۲

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = 56$$

۸-۸

$$P(2, 2) = \frac{2!}{(2-2)!} = \frac{2!}{0!} = 2$$

۹-۲

۱۰- با توجه به شرط زوج بودن عدد باید یکان آن زوج باشد و چون رقم صفر در بین ارقام وجود دارد و اینکه رقم صفر در صدگان هم نمی تواند قرار بگیرد باید برای شمارش تعداد اعداد سه رقمی به دو حالت سؤال را حل کنیم:

۶	۵	۱
---	---	---

حالت اول: رقم یکان صفر باشد.

و طبق اصل ضرب  $6 \times 5 \times 1 = 30$  می توان نوشت.

۵	۵	۳
---	---	---

حالت دوم: رقم یکان غیر صفر باشد.

و طبق اصل ضرب  $5 \times 5 \times 3 = 75$  می توان نوشت.

و در نهایت طبق اصل جمع  $30 + 75 = 105$  عدد می توان نوشت.

۱۱- طبق شرایط فرد بودن و اینکه رقم تکراری نباید وجود داشته باشد.

۴	۳	۳
---	---	---

و طبق اصل ضرب  $4 \times 3 \times 3 = 36$  عدد می توان نوشت.

۱۲- چون در مجموعه ترتیب اعضا اهمیت ندارد بنابراین پاسخ سؤال به صورت

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} = 10$$

۱۳- طبق شرایط سؤال چون نباید از شهر B عبور کنیم، باید ابتدا از شهر C به شهر A و سپس از شهر A به شهر D برویم. از شهر C به شهر A، ۳ راه مختلف و از شهر A به شهر D، ۴ راه مختلف وجود دارد و طبق اصل ضرب در نهایت به  $3 \times 4 = 12$  طریق مختلف می توانیم از C به D برویم.

$$\binom{3}{1} \times \binom{4}{1} = \frac{3!}{1! \times 2!} = \frac{4!}{1! \times 3!} = \frac{3 \times 2!}{1 \times 2!} \times \frac{4 \times 3!}{1 \times 3!} = 3 \times 4 = 12 - 14$$

۱۵- هر مسئله ای که طرح کنیم که برای پاسخ آن به انتخاب ۳ شی از ۵ شی متمایز بیانجامد که ترتیب هم اهمیت نداشته باشد درست است. بنابراین می توانیم سؤال را

به صورت زیر مطرح کنیم.

می خواهیم از بین ۵ نفر یک کمیته ۳ نفر تشکیل دهیم این کار به چند طریق امکان پذیر است.

### درس دوم

(الف)

۱- غیر ممکن

۲- برآمد

۳- ناسازگار

$$2^3 = 8 - 4$$

(ب)

۵- درست

۶- درست

۷- نادرست زیرا جواب معادله به طور قطعی تعیین می شود.

۸- نادرست زیرا نتیجه آزمون کل فضای نمونه را تشکیل نمی دهد.

(ج)

$$n(S) = 2^3 = 8 \quad -9$$

$$P(A) = 0/01 \Rightarrow P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0/01 = 0/99 \quad -10$$

۱۱- پیشامد نشدنی یا غیر ممکن که همان پیشامد تهی می باشد که طبق مطالب درسنامه احتمال آن برابر صفر می شود.

۱۲- جعبه کلاً ۱۲ مهره دارد بنابراین تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با:

$$n(S) = \binom{12}{3} = \frac{12!}{3! \times 9!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{3! \times 9!} = 220$$

پیشامد بیان شده در صورت سؤال حداکثر ۲ مهره قرمز است یعنی ۲ مهره قرمز و ۱ مهره آبی یا ۱ مهره قرمز و ۲ مهره آبی یا هر سه مهره آبی می باشد که تعداد اعضای پیشامد برابر می شود با:

$$n(A) = \binom{7}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{7}{1} \times \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 21 \times 5 + 7 \times 10 + 10 = 185$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{185}{220} = \frac{37}{44}$$

۱۳- در پرتاب ۲ تاس پیشامد مطلوب مجموع ۱۰ و ۱۱ می باشد یعنی:

$$A = \{(6, 5), (5, 6), (6, 6)\}$$

$$S = \{(d, d), (p, p), (d, p), (p, d)\} \Rightarrow n(S) = 4 \quad -14 \text{ (الف)}$$

$$A = \{(d, d), (p, p)\} \Rightarrow n(A) = 2 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{(ب)}$$

$$n(S) = 2 \times 6 = 12 \quad -15$$

$$A = \{(d, d), (p, p), (d, 2), (2, d), (p, 2), (2, p), (d, 3), (3, d), (d, 4), (4, d), (d, 5), (5, d), (d, 6), (6, d)\}$$

↓

$$n(A) = 9$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

# مشخصات کتاب

سیگنال ۲۰-ریاضی و آمار ۳  
پایه دوازدهم رشته علوم انسانی

عنوان کتاب

پایه دوازدهم

گروه سنی

دکتر افروزه جعفری - مرتضی برزویی

مؤلفان

رحلی

قطع کتاب

۳۹

تعداد صفحات