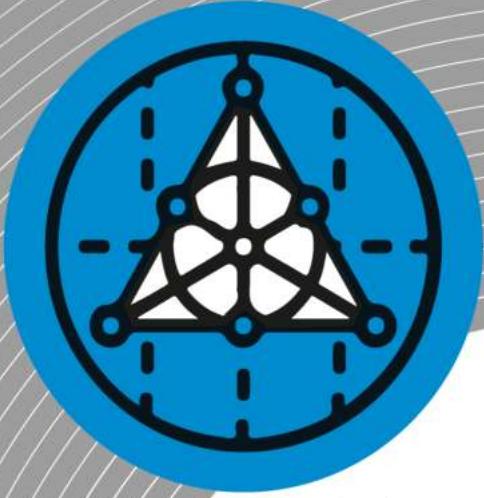


خط سفید  
گروه آموزشی خط سفید



پایه

۱۴

ریاضی

# گنبد

۲۵

خط سفید

ریاضیات گسسته

دکتر محمود بهروزیان  
حسین ایلیون کشکولی

## پیشگفتار

درد و ادب به تمامی دبیران و مدرسان گرامی و دانش آموزان دوست داشتنی و سخت‌کوش سراسر ایران پهناور با توجه به تغییرات صورت گرفته در شرایط برگزاری کنکور سراسری و **تأثیر سوابق تحصیلی** در ورود به دانشگاه و موسسات آموزش عالی، بر آن شدیم تا منبعی مطمئن برای یادگیری و آموزش اثربخش و سنجش و ارزیابی هدفمند و موثر فراهم کرده و مسیر دانش آموزان عزیز را جهت کسب **نمره (۲۰)** در تمام امتحانات پیش رویشان هموار سازیم.

## درباره کتاب

مجموعه کتاب‌های **سیگنال ۲۰ خط سفید** برای تمام دروس پایه دوازدهم در ۳ رشته تحصیلی علوم ریاضی و فیزیک، علوم تجربی و علوم انسانی به تالیف و گردآوری رسیده و شامل ۴ بخش اصلی می‌باشد.

۱. آموزش (درسنامه کاملا کاربردی)

محتوای تالیفی درسنامه‌ها شامل تمام مطالب آموزشی مهم و کاربردی و مفاهیم اساسی و نکات کلیدی کتاب درسی بوده که موجب تسهیل فرآیند یادگیری شده و امکان مرورهای سریع و مانا و همچنین جمع‌بندی‌های دوره‌ای را در طول سال تحصیلی فراهم می‌سازد.

۲. سنجش (سوالات امتحانات نهایی و احتمالی)

به منظور بالا بردن سطح توانایی و مهارت دانش‌آموزان پایه دوازدهم برای پاسخگویی کامل و درست به پرسش‌های امتحانات گوناگون و تقویت یادگیری، سوالاتی در تیپ و قالب‌های متنوع نهایی و تالیفی-احتمالی گردآوری و تالیف گردیده است؛ که با تمرین و تکرار مداوم این سوالات، امکان شناخت نقاط قوت و ضعف دانش‌آموزان را در درس‌های مختلف فراهم می‌سازد.

۳. نمونه سوال امتحان (امتحانات ۲۰ نمره‌ای نوبت اول و دوم - نهایی و احتمالی)

علاوه بر مجموعه سوالات طبقه بندی شده، ۲ نمونه امتحان تالیفی-احتمالی نوبت اول (دی ماه)، ۲ نمونه امتحان تالیفی-احتمالی نوبت دوم (خردادماه)، امتحان نهایی دوره‌های شهریور و دی ماه ۱۴۰۱ و امتحان نهایی دوره خرداد ماه ۱۴۰۲ برای بررسی و ارزیابی میزان یادگیری و ارتقاء هرچه بیشتر توانمندی دانش‌آموزان عزیز و کسب بهترین نتیجه فراهم شده است.

۴. پاسخنامه تشریحی آموزشی

پاسخنامه کاملا تشریحی و آموزشی سوالات در پایان کتاب برای تقویت یادگیری و کاهش حداکثری خطاها و اشتباهات احتمالی دانش‌آموزان آماده سازی شده است.

## سیگنال بگیر تا بیست برو!

## فهرست

### بارم بندی

فصل	محدوده فصل	نوبت اول	نوبت دوم	شهریور دی
۱	کل	۱۵	۵	۷
۲	تصفحه ۴۲	۵	۲	۶
	صفحه ۴۲ به بعد		۵	
۳	کل		۸	۷
جمع		۲۰	۲۰	۲۰

درسنامه	سوال	پاسخنامه تشریحی
فصل ۱: درس اول	۳	۴۱
درس دوم	۵	۴۲
درس سوم	۸	۴۵
فصل ۲: درس اول	۱۰	۴۹
درس دوم	۱۶	۵۲
فصل ۳: درس اول	۲۴	۵۴
درس دوم	۳۱	۶۱

سوال	پاسخنامه امتحان
امتحان شماره ۱	۲۲
امتحان شماره ۲	۲۳
امتحان شماره ۳	۳۳
امتحان شماره ۴	۳۴
امتحان نهایی شهریورماه ۱۴۰۱	۳۵
امتحان نهایی دی‌ماه ۱۴۰۱	۳۷
امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۲	۳۹



#### درس اول: استدلال ریاضی

##### استدلال

استدلال یعنی ارائه دلیل برای اثبات درستی یک گزاره.

##### اثبات مستقیم

در اثبات مستقیم با استفاده از دنباله ای از داده ها مانند اصول، نتایج، قضیه ها و تعاریف، درستی حکم را ثابت می کنیم.

##### تذکره

استفاده از اثبات مستقیم گاهاً پیچیده و دشوار است. در این کتاب هدف ما اثبات های پیچیده و دشوار نیست.

**مثال:** ثابت کنید مجموع دو عدد فرد عددی زوج است.

**اثبات:** فرض کنید  $m, n$  دو عدد فرد باشند در این صورت اعداد صحیح  $k$  و  $k'$  موجودند به طوری که:

$$m = 2k + 1, \quad n = 2k' + 1$$

$$m + n = (2k + 1) + (2k' + 1) = 2k + 2k' + 2 = 2(k + k' + 1)$$

بنابراین  $m+n$  عددی زوج است.

**مثال:** اگر  $k$  حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشند آنگاه  $4k+1$  مربع کامل است.

**اثبات:** چون  $k$  حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی است لذا  $n \in \mathbb{N}$   $k = n(n+1) = n^2 + n$  که:

$$4k + 1 = 4(n^2 + n) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2$$

**مثال نقض:** مثالی است که با استفاده از آن می توان کلیت یک حکم غیر کلی را رد کرد. می دانیم که هیچ گاه با استفاده از یک مثال نمی توان درستی یک حکم را اثبات کرد ولی از آن برای نشان دادن نادرستی یک حکم استفاده می کنیم.

**مثال:** هر گاه برای هر سه مجموعه  $C, B, A$  داشته باشیم  $A \cap B = A \cap C$  آنگاه  $B = C$ . این گزاره در حالت کلی درست نیست زیرا اگر:

$$A = \{1, 2\}$$

$$B = \{1, 2, 3\}$$

$$C = \{1, 2, 4\}$$

$$A \cap B = \{1, 2\} \text{ و } A \cap C = \{1, 2\}$$

بنابراین با وجود این که  $A \cap B = A \cap C$  ولی  $B \neq C$ .

**مثال:** اگر  $X$  و  $Y$  دو عدد حقیقی مثبت باشند آن گاه:  $\sqrt{X+Y} = \sqrt{X} + \sqrt{Y}$  می دانیم در حالت کلی این گزاره درست نیست لذا اگر:

$$x=64, y=36$$

$$\sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$

آنگاه:

$$\sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14$$

ولی

$$\sqrt{X+Y} \neq \sqrt{X} + \sqrt{Y}$$

پس در حالت کلی

**اثبات با در نظر گرفتن همه حالت ها (روش اشباع):**

گاهی اوقات در اثبات یک گزاره با ارزش درستی، برای فرض حالت های مختلفی وجود دارد که می بایست با در نظر گرفتن همه این حالت ها درستی حکم را ثابت می کنیم.

**مثال:** ثابت کنید حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی عددی زوج است.

**اثبات:** فرض کنیم  $X$  و  $Y$  دو عدد صحیح متوالی باشند لذا برای عدد  $X$  دو حالت وجود دارد.

**حالت الف:** اگر  $X$  فرد باشد آن گاه  $Y$  زوج است لذا  $XY$  زوج است.

**حالت ب:** اگر  $X$  زوج باشد آن گاه  $XY$  زوج است.

پس همواره  $XY$  عددی زوج است.

**مثال:** ثابت کنید برای هر عدد طبیعی  $n$ ، حاصل عبارت  $n^2 - 5n + 7$  عددی فرد است.

**اثبات:** چون  $n$  عددی طبیعی است پس دو حالت برای آن وجود دارد.

**حالت الف:** اگر  $n$  زوج باشد آنگاه  $k \in \mathbb{Z}$  وجود دارد که  $n=2k$  پس:

$$n^2 - 5n + 7 = (2k)^2 - 5(2k) + 7 = 4k^2 - 10k + 7 =$$

$$4k^2 - 10k + 6 + 1 = 2(2k^2 - 5k + 3) + 1$$

**حالت ب:** اگر  $n$  فرد باشد آنگاه  $k \in \mathbb{Z}$  موجود است که  $n=2k+1$  پس:

$$n^2 - 5n + 7 = (2k+1)^2 - 5(2k+1) + 7 = 4k^2 + 4k + 1 - 10k - 5 + 7 =$$

$$4k^2 - 6k + 3 = 4k^2 - 6k + 2 + 1$$

$$= 2(2k^2 - 3k + 1) + 1 \rightarrow \text{فرد}$$

**اثبات غیر مستقیم (برهان خلف):** در این روش با فرض نادرستی حکم به نادرستی فرض می رسیم.

**مثال:** فرض کنید  $r$  عددی گویا و  $X$  عددی اصم (گنگ) باشد، ثابت کنید  $r+X$  گنگ است.

**اثبات به روش برهان خلف:** فرض کنید  $r+X$  عددی گنگ نباشد لذا گویا است.

از آنجایی که تفاضل دو عدد گویا عددی گویاست لذا:  $(r+X) - r = X$  عددی گویاست که خلاف فرض است پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.

##### گزاره های هم ارز:

دو گزاره که دارای ارزش یکسانی باشند را دو گزاره هم ارز می نامند.

هر گاه  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند که  $p \Rightarrow q$  ،  $q \Rightarrow p$  دو گزاره درست باشند آن گاه  $p \Leftrightarrow q$  یک گزاره درست است برعکس این مسئله نیز درست است. در این حالت  $p$  و  $q$  را هم ارز گوئیم و می نویسیم:  $p \cong q$ .

##### اثبات های بازگشتی:

در این روش برای اثبات یک گزاره کافی است گزاره را با گزاره ساده تری هم ارز کنیم و از درستی آن گزاره درستی گزاره اولیه را نتیجه بگیریم.

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0$$

**مثال:** اگر  $a > 0$  ثابت کنید.

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$$

چون روابط بالا بازگشت پذیر است پس در مسیر برگشت حکم داده شده اثبات می شود.

**مثال:** ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

**اثبات:** اگر  $a$  و  $b$  دو عدد نامنفی باشند آنگاه  $\frac{a+b}{2}$  میانگین حسابی آنها و  $\sqrt{ab}$  میانگین هندسی آنهاست.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

در واقع باید ثابت کنیم:

حال از بدیهی بودن درستی گزاره آخری درستی گزاره اولیه را نتیجه می‌گیریم.  
**مثال:** اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید.

$$a^2 + b^2 + ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + (a^2 + 2ab + b^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + (a+b)^2 \geq 0$$

حال از بدیهی بودن درستی گزاره آخری درستی گزاره اولیه را نتیجه می‌گیریم.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab - 4ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

## سؤالات امتحان نهایی و احتمالی فصل اول (درس اول)

۱- ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج  $n$ ،  $5n + 7$ ،  $n^2 - 5n + 7$  عددی فردی است. (خرداد ۱۴۰۱)

۲- گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید. (دی ۱۴۰۱)

«برای هر دو عدد حقیقی  $x$  و  $y$ :  $y \geq -2x(y+x+1)$ »

۳-  $a_1, a_2, a_3$  اعداد صحیح هستند،  $b_1, b_2, b_3$  همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید  $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$

عددی زوج است. (احتمالی)

۴- به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی کوچکتر یا مساوی نصف مجموع مربعات آنهاست. (دی ۱۴۰۰)

۵- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو عدد گنگ باشند ولی  $\alpha + \beta$  گویا باشد با استفاده از برهان خلف ثابت کنید  $\alpha - \beta$  گنگ است. (دی ۹۹)

۶- برای هر سه عدد حقیقی  $x, y$  و  $z$  ثابت کنید.  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$  (شهریور ۹۸)

۷- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با دلیل مشخص کنید. (احتمالی)

(الف) اگر  $k$  حاصلضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آن گاه  $4k+1$  مربع کامل است.

(ب) مجموع هر دو عدد فرد عددی زوج است.

(ج) برای هر عدد طبیعی  $n$  ( $n$  عدد  $2^n - 1$  اول است.

(د) مجموع هر دو عدد گنگ عددی گنگ است.

۸- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. (احتمالی)

(الف) هیچ دو عدد صحیحی مانند  $x$  و  $y$  وجود ندارد که  $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ .

(ب) اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند و  $ab = 0$  آنگاه  $a = 0$  یا  $b = 0$ .

(ج) اگر  $a, b \in \mathbb{R}$  باشند داریم:  $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

(د) حاصلضرب هر سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.

۹- گزاره درست را اثبات و گزاره نادرست را با ارائه مثال نقض رد کنید. (احتمالی)

(الف) برای هر عدد طبیعی  $n$  عدد  $2^n + 1$  اول است.

(ب) مربع هر عدد فرد عددی فرد است.

۱۰- درستی گزاره‌های زیر را اثبات و یا نادرستی را با مثال نقض رد کنید. (احتمالی)

(الف) اگر  $x$  عددی گنگ باشد آنگاه  $\frac{1}{x}$  نیز عددی گنگ است.

(ب) اگر  $A$  و  $B$  و  $C$  سه مجموعه باشند که  $A \cup B = A \cup C$  آنگاه  $B = C$ .

۱۱- به کمک رابطه بازگشتی درستی رابطه  $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$  را ثابت کنید. (احتمالی)

$$(a, b \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0)$$

۱۲- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل بیان کنید. (احتمالی)

(الف) حاصل ضرب هر عدد گویا در یک عدد گنگ عددی گنگ است.

ب) اگر  $a$  و  $b$  دو عدد گنگ ولی  $a+b$  گویا باشد آنگاه  $a-2b$  گنگ است.

۱۳- ثابت کنید اگر  $a$  و  $b$  و  $c$  سه عدد حقیقی باشند آنگاه:  $2(a+b+c) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 3$  (احتمالی)

۱۴- ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی  $x$  و  $y$ :  $x + y + 1 \geq xy + x + y$  (احتمالی)

۱۵- اگر  $a$  و  $b$  دو عدد صحیح باشند که  $ab$  عددی فرد است. در این صورت  $a^2 + b^2$  عددی زوج است. (احتمالی)

۱۶- ثابت کنید در تقسیم مربع هر عدد بر ۴ باقی مانده برابر صفر یا یک است. (احتمالی)

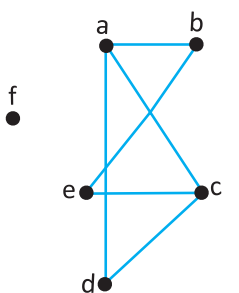
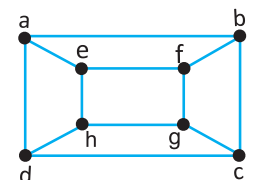
۱۷- نشان دهید اگر  $n^2$  زوج باشد  $n$  نیز زوج است. (احتمالی)

۱۸- ثابت کنید اگر  $n$  طبیعی و  $2-3n$  فرد باشد  $n$  هم فرد است. (احتمالی)

۱۹- اگر  $a < 0$  باشد ثابت کنید  $a + \frac{1}{a} \leq -2$ . (احتمالی)

۲۰- اگر  $x, y$  دو عدد حقیقی هم علامت باشند، ثابت کنید:  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ . (احتمالی)

ردیف	نمره	سوال
		۱- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.
	۱	الف) اگر $K$ حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آنگاه $4K+1$ مربع کامل است.
		ب) هر دو عدد طبیعی متوالی نسبت به هم اولند.
		ج) گراف ۳- منتظم از مرتبه ۵ قابل رسم نیست.
		د) برای هر عدد طبیعی $n$ بزرگتر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.
	۱	۲- اگر $\alpha$ و $\beta$ دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد ثابت کنید $\alpha + 2\beta$ گنگ است.
	۱/۵	۳- برای هر عدد صحیح $n$ ثابت کنید $n^2 + 11n + 30$ همواره عددی زوج است.
	۱	۴- اگر $x$ و $y$ دو عدد حقیقی مثبت باشند ثابت کنید.
		$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$
	۱/۵	۵- نادرستی روابط زیر را با ارائه مثال نقض نشان دهید.
		الف) برای هر عدد حقیقی مثبت $x$ داریم: $x > \frac{1}{x}$
		ب) برای هر دو عدد حقیقی $x$ و $y$ رابطه $ x+y  <  x  +  y $ همواره برقرار است.
	۱	۶- اگر $a > 1$ و $a  9k+4 $ و $a  5k+3 $ ثابت کنید $a$ عددی اول است.
	۱	۷- اگر $a$ عددی صحیح و فرد باشد و $a+2$ باقی مانده تقسیم عدد $a^2 + b^2 + 3$ را بر ۸ بیابید.
	۱	۸- باقی مانده تقسیم عدد $A = (1 \dots 1^3) \times 12 + 10$ بر عدد ۷ را بیابید.
	۱	۹- معادله همبستگی $3x \equiv 13 \pmod{7}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بدست آورید.
	۱	۱۰- اگر سوم خرداد در یک سال پنجشنبه باشد، ۲۲ بهمن در همان سال چه روزی از هفته است؟
	۱	۱۱- به چند طریق می‌توان کیسه‌ی ۱۳۱ کیلویی را با وزنه‌های ۷ و ۵ کیلویی وزن کرد؟
	۱	۱۲- آیا از رابطه $a   b+c$ همواره می‌توان نتیجه گرفت $a   b$ یا $a   c$ ؟ در صورت پاسخ منفی مثال نقض بیاورید.
	۱	۱۳- اگر $n \in \mathbb{N}$ و $a \equiv b \pmod{m}$ ثابت کنید $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ .
	۱	۱۴- اگر باقی مانده تقسیم $a$ بر ۵ برابر ۳ باشد باقی مانده $3a + 2a^2$ بر ۵ را بیابید.
	۱	۱۵- فرض کنید $G$ گرافی ۴- منتظم و $\bar{G}$ گرافی ۵- منتظم باشد. اندازه $G$ را بدست آورید.
	۱	۱۶- گراف $K_p$ دارای ۳۶ یال است. در این گراف، مرتبه گراف و $\Delta(G)$ را مشخص کنید.
	۲	۱۷- باتوجه به گراف روبرو به سوالات زیر پاسخ دهید.
		الف) یک مسیر به طول ۳ از $a$ به $d$ بنویسید.
		ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید.
		پ) درجه راس $a$ در گراف $\bar{G}$ را تعیین کنید.
		ت) آیا گراف $G$ همبند است؟ چرا؟
	۲۰	جمع نمرات
		موفق و سربلند باشید

نمره	ردیف
۱	۱- درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید. الف) اگر $a, b$ اعداد حقیقی باشند آنگاه: $a > b \Rightarrow a^3 < b^3$ ب) مجموع هر دو عدد گنگ عددی گنگ است. پ) با ارقام ۳ و ۴ و ۵ می توان ۱۲ عدد دو رقمی متمایز نوشت. (بدون تکرار ارقام) ت) گراف $P_7$ دارای دوری به طول ۷ است.
۱	۲- جاهای خالی را کامل کنید. الف) معادله همبستگی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است اگر و تنها اگر ..... ب) تعداد یال های گراف $K_n$ برابر است با ..... پ) گراف $G$ را همبند گویند هر گاه بین هر دو رأس آن یک ..... وجود داشته باشد. ت) حاصلضرب هر عدد گویا در عددی گنگ لزوما عددی گنگ ..... ۳- اگر $a, b$ دو عدد حقیقی باشند با استفاده از استدلال بازگشتی ثابت کنید: $a^2 + 1 \geq b(2 - b)$
۱/۵	۴- اگر باقیمانده تقسیم اعداد $a, b$ بر ۲۷ به ترتیب ۱۲ و ۱۳ باشد، باقیمانده تقسیم $(2a - 3b)$ بر ۲۷ را بدست آورید.
۱/۵	۵- معادله $432x \equiv 11 \pmod{432}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بدست آورید.
۱/۵	۶- اگر ۲۹ خرداد یک سال دوشنبه باشد، ۲ اسفند همان سال چه روزی از هفته است؟
۲	۷- گراف $G$ به صورت روبه رو رسم شده است. الف) $\Delta(G), \delta(G)$ را مشخص کنید. ب) بیشترین درجه در مکمل گراف $G$ چند است؟ پ) $N_G(e)$ را با اعضا بنویسید. ت) آیا گراف $G$ همبند است؟ چرا؟
	
۱/۲۵	۸- گراف کامل $K_p$ دارای ۱۵ یال است. $p$ را بیابید و گراف را رسم کنید.
۱/۵	۹- الف) ثابت کنید هر مجموعه احاطه گر دلخواه غیر مینیمال را می توان با حذف برخی از رئوسش به یک مجموعه احاطه گر مینیمال تبدیل کرد. ب) با رسم $P_6$ یک مجموعه احاطه گر مینیمال غیر مینیمم بنویسید.
۱	۱۰- تفاوت بین مجموعه احاطه گری می نیمال و مجموعه احاطه گری می نیمم چیست؟
۱/۵	۱۱- عدد احاطه گری گراف شکل زیر را با ارائه راه حل تعیین کنید.
	
۱/۲۵	۱۲- معادله $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 11$ چه تعداد جواب صحیح و نامنفی دارد، به شرط آنکه: $X_i \geq 1, 1 \leq i \leq 5$
۰/۷۵	۱۳- هشت نفر به چند طریق می توانند در یک اتاق چهار نفره و دو اتاق دو نفره قرار بگیرند؟ الف) دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ بنویسید. ب) یک مربع لاتین چرخشی $4 \times 4$ بنویسید.
۱/۵	۱۴- مجموعه اعداد $A = \{1, 2, \dots, 84\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید هر زیر مجموعه ۴۴ عضوی از $A$ دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر با ۸۶ باشد.
۱/۷۵	۱۵- به چند طریق می توان ۵ شاخه گل را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل یک شاخه گل داده باشیم؟
۲۰	جمع نمرات موفق و سربلند باشید



## فصل اول درس اول

-۱

چون  $n$  زوج است پس عدد  $k \in \mathbb{N}$  وجود دارد که  $n = 2k$  لذا:

$$n^2 - 5n + 7 = (2k)^2 - 5(2k) + 7 = 4k^2 - 10k + 7$$

$$= 4k^2 - 10k + 6 + 1 = 2(2k^2 + 5k + 3) + 1$$

-۲

$$y^2 + 1 \geq -2xy - 2x^2 - 2x \Leftrightarrow 2x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 + (x+1)^2 \geq 0$$

از آنجایی که درستی گزاره پایانی بدیهی است پس گزاره اولیه درست است.

-۳

فرض خلف: فرض کنید  $(a_3 - b_3)(a_2 - b_2)(a_1 - b_1)$  عددی فرد باشد در این صورت هر سه عامل  $a_3 - b_3$ ،  $a_2 - b_2$ ،  $a_1 - b_1$  همگی فردند پس حاصل جمع آنها نیز فرد است پس:

$$(a_3 - b_3) + (a_2 - b_2) + (a_1 - b_1) = 0$$

-۴

فرض کنید  $x, y$  دو عدد حقیقی باشند در این صورت می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$$

چون درستی گزاره پایانی بدیهی است نتیجه می‌گیریم گزاره اولیه درست است.

-۵

فرض خلف: فرض کنید  $\alpha - \beta$  گویا باشد در این صورت  $(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) = 2\alpha$  گویاست پس  $\alpha = \frac{2\alpha}{2}$  گویاست که تناقض است.

-۶

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2xz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz) + (x^2 + y^2 + z^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2 + (x^2 + y^2 + z^2) \geq 0$$

باتوجه به بدیهی بودن درستی گزاره آخری گزاره اولیه درست است.

-۷

$$k = n(n+1) = n^2 + n \Rightarrow 4k + 1 = 4(n^2 + n) + 1$$

$$\Rightarrow 4k + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$$

(الف) درست:

(ب) درست:

$$n = 2k + 1, m = 2k' + 1$$

$$m + n = (2k + 1) + (2k' + 1) = 2k + 2k' + 2 = 2(k + k' + 1)$$

(ج) نادرست:  $n = 4 : 2^n - 1 = 2^4 - 1 = 15 = 3 \times 5$

(د) نادرست:  $\sqrt{2}$  و  $-\sqrt{2}$  هر دو گنگ هستند ولی  $-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$  گویاست.

(مثال نقض)

-۸

(الف) نادرست: اگر  $x = 0$  و  $y = 1$  باشد (مثال نقض).

(ب) درست: اگر  $a \neq 0$  باشد آنگاه  $a$  وارون پذیر است پس  $a^{-1} \in \mathbb{R}$  موجود است

که  $a^{-1} \cdot a = 1$  لذا

$$a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = 1 \cdot b = b = 0$$

(ج) نادرست: اگر  $a = -3$  و  $b = 2$  داریم  $-3 - (2 + 2) = -3 - 4 = -7 < (-3)^2 = 9$  (مثال نقض)

(د) درست: فرض کنیم  $n$  عددی طبیعی باشد در این صورت برای  $n$  دو حالت داریم:

(الف) زوج است لذا  $n(n+1)(n+2)$  بر ۲ بخش پذیر است.

(ب) فرد است لذا  $n+1$  زوج است پس  $n(n+1)(n+2)$  بر ۲ بخش پذیر است.

پس حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر ۲ بخش پذیر است.

برای نشان دادن بخش پذیری بر ۳، سه حالت داریم:

**حالت ۱)**  $n = 3k$  پس  $n(n+1)(n+2)$  بر ۳ بخش پذیر است.

**حالت ۲)**  $n = 3k + 1$  پس  $n + 2 = 3(k+1)$  لذا  $n(n+1)(n+2)$  بر ۳ بخش پذیر است.

بخش پذیر است.

**حالت ۳)**  $n = 3k + 2$  پس  $n + 1 = 3(k+1)$  لذا  $n(n+1)(n+2)$  بر ۳ بخش پذیر است.

بخش پذیر است.

بنابراین در حالت کلی حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی بر ۲ و ۳ یعنی بر ۶ بخش پذیر است.

-۹

(الف) نادرست: اگر  $n = 3$  باشد  $2^3 + 1 = 8 + 1 = 9$  اول نیست. (مثال نقض)

(ب) درست: چون  $n$  فرد است لذا  $n = 2k + 1$  پس:

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

-۱۰

اثبات:

(الف) درست: اثبات برهان خلف: فرض کنید  $\frac{1}{x}$  گنگ نباشد پس گویاست لذا

معکوس آن یعنی  $x$  نیز گویاست. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

(ب) نادرست: فرض کنید  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 4\}$ ,  $C = \{1, 2, 4\}$  در این صورت

$$B \neq C \text{ ولی } A \cup B = A \cup C = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b \Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$$

اثبات:

$$\Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a+b)$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$



# مشخصات کتاب

سیگنال ۲۰- ریاضیات گسسته  
پایه دوازدهم رشته ریاضی فیزیک

**عنوان کتاب**

پایه دوازدهم

**گروه سنی**

دکتر محمود بهروزیان

**مؤلفان**

رحلی

**قطع کتاب**

۷۲

**تعداد صفحات**